PARTIE I

Électrostatique

Chapitre I

Loi de Coulomb, Champ, Potentielle, et Energies Électrostatique

I Distribution de Charge

II-1) Distribution discontinue de charge

Un système porte des charges q_1 q_2 .....q_n

- Totale charge du system est :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

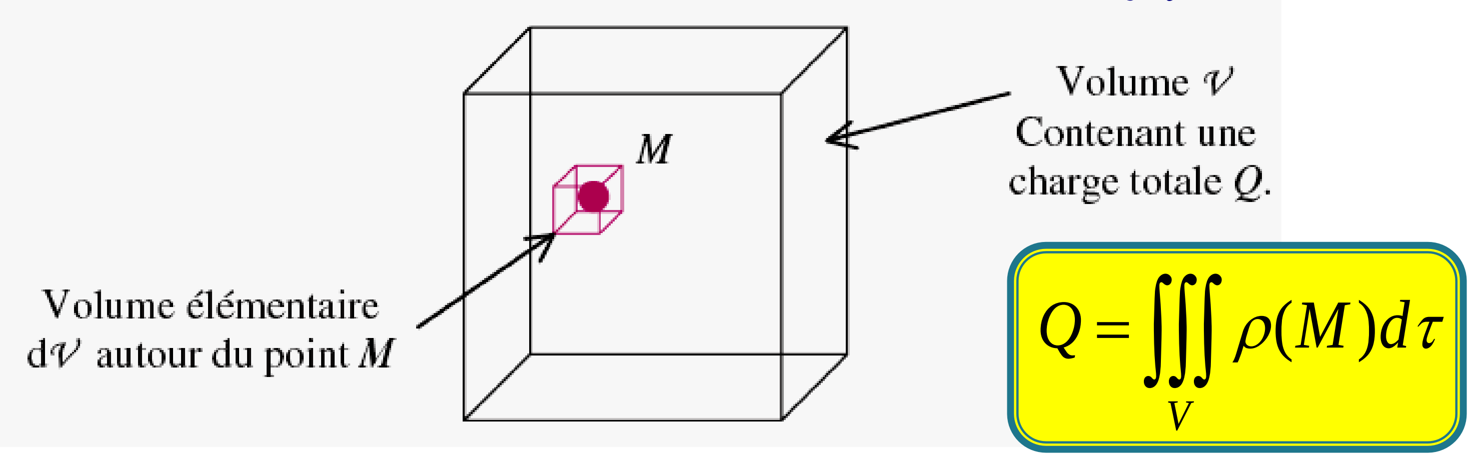
$$\bullet\, q_1 \quad \bullet\, q_2 \quad \bullet\, q_3 \quad \bullet\, q_4 \quad \bullet\, q_n \quad = \quad Q$$

I Distribution de Charge…

II-2) Distribution Continue de Charge

Quand on étudie un corps électrisé en volume, surface ou longueur, il faut le découper en éléments de volume, surface ou longer assimilables á des charges ponctuel les dq.

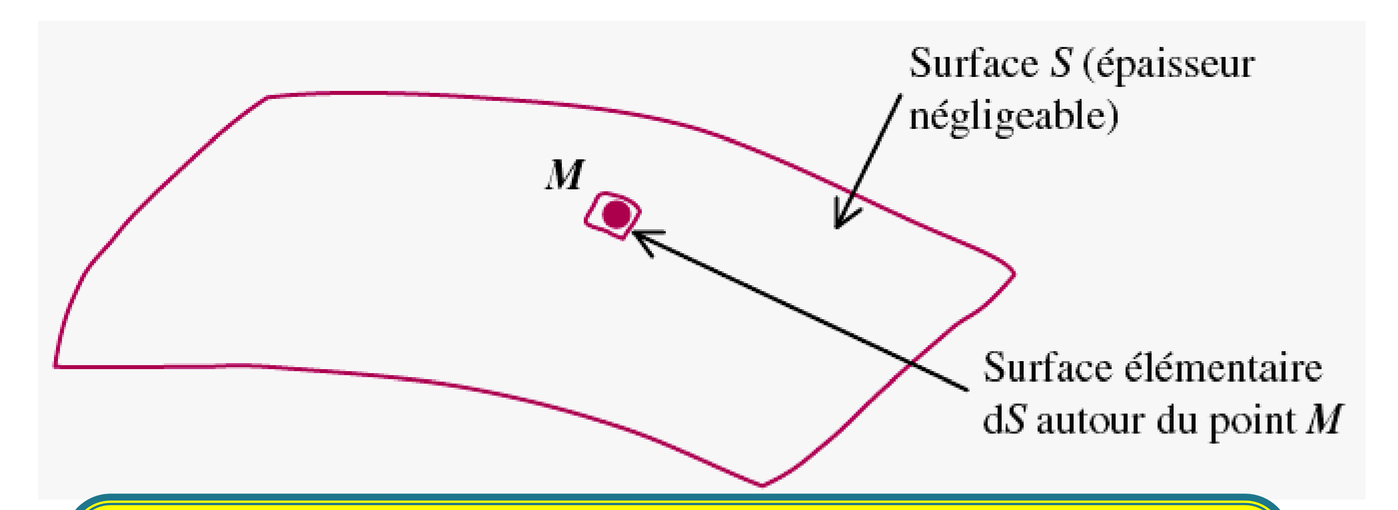
a) Distribution Volumique $\rho(M) = \dfrac{dq}{d\tau} \Leftrightarrow dq = \rho(M)d\tau$



II Distribution de Charge…

II-2) Distribution Continue de Charge …

b) Distribution Surfacique

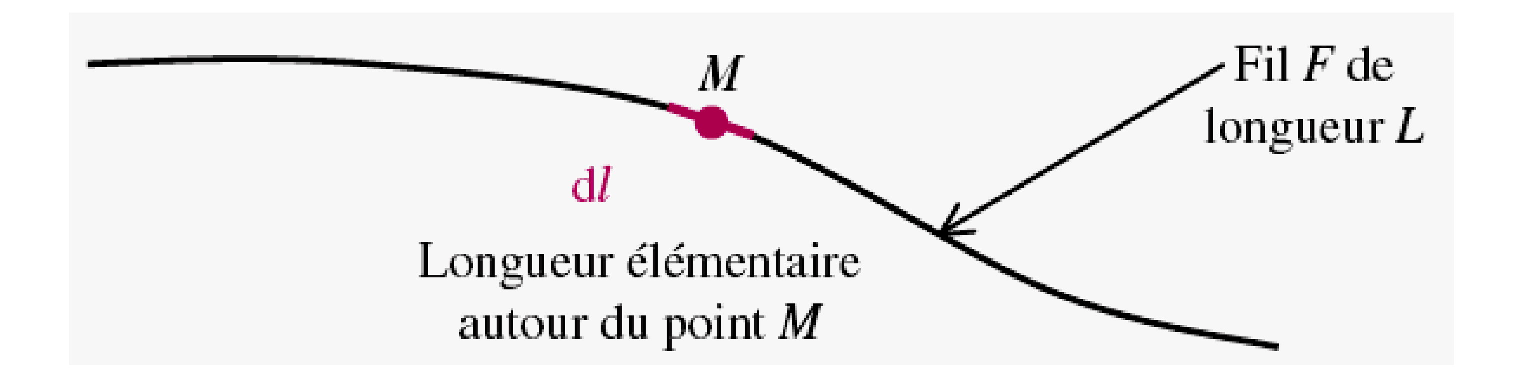


$$\sigma(M) = \frac{dq}{dS} \Leftrightarrow dq = \sigma(M)dS \Rightarrow Q = \iint_{(S)} \sigma(M)\ ds$$

I Distribution de Charge…

II-2) Distribution Continue de Charge…

c) Distribution Linéique



$$\lambda(M) = \frac{dq}{dl} \Rightarrow Q = \int_{(L)} \lambda(M)\,dl$$

Exemple

Soit un fil fin, de centre O, dirigé suivant un axe Oz, de longueur $2L$ et portant une charge électrique totale Q répartie linéairement.

a) Donner l'expression de la densité linéique de charge moyenne λ_m si on suppose que la répartition est uniforme.

b) Cette distribution de charge n'est pas uniforme et suit la loi :

$$\lambda(z) = \lambda_o \cos\frac{\pi.z}{2L}. \quad \text{pour} \quad -L \leq z \leq +L \text{ et } \lambda(z) = 0 \quad \text{pour} \quad |z| \geq L$$

Exprimer la charge élémentaire δQ située en z sur une portion de fil dz. En déduire l'expression de λ_o en fonction de Q et de L.

Réponse : a) $\lambda_m = \dfrac{Q}{2L}$

b) $dQ = \lambda_0 \cos(\frac{\pi z}{2L})dz \quad et \quad \lambda_0 = \dfrac{\pi}{2}\lambda_m$

II Loi de Coulomb

- La loi de coulomb s'exprime l'interaction charge ponctuelles. Deux ponctuelle charges q_1 q_2 , placée en point P, M, fixes, et distants de r.

$$P \quad \vec{F}_{12} \qquad \qquad \vec{F}_{21} \quad M$$

$$q_1 \bullet\!\longrightarrow \qquad\qquad \longleftarrow\!\bullet q_2$$

- La charge q_1 s'exerce la force ***F₂₁*** sur q_2,

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$

II Loi de Coulomb…..

- $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi \times 10^9} \simeq 9 \times 10^9\, F/m$ Permittivité du vide (air)

- $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ permittivité relative du millier.

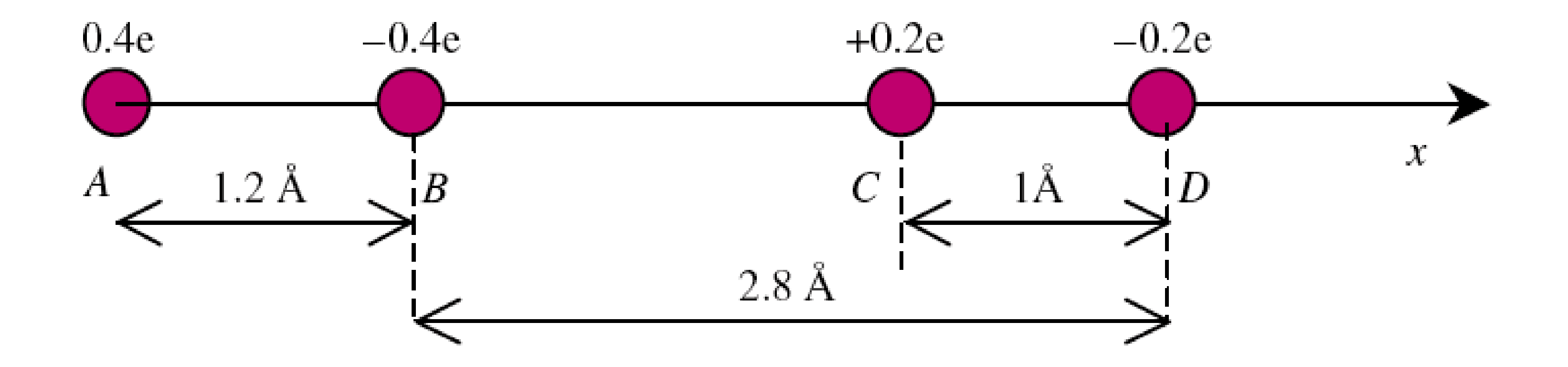
- La charge q_2 s'exerce la force $\boldsymbol{F_{12}}$ sur q_1 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{MP}$$

Donc $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Exemple:

On considère le système de charges ponctuelles représenté sur la



Déterminer la force électrostatique sur la charge B ($q_B = -0{,}4e$) en précisant sa direction et sa norme.

On donne $e = 1.6.10^{-19}$C ; $1Å = 10^{-10}$m et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$u.s.i.

Réponse : $F_B = 0{,}946.10^{-9}$ N et la force est dirigée suivant l'axe des x vers A.

III Champ Electrostatique

III-1) Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

- Si charge q_1 est fixe, q_2 est la charge d'essai

$$P \quad \vec{F}_{12} \qquad\qquad \vec{F}_{21} \quad M$$

$$q_1 \qquad\qquad\qquad\qquad q_2$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM} \Rightarrow \frac{\vec{F}_{21}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$

III Champ Electrostatique….

- Pour autre charge q_3 ;q_4…… la force exerce par q_1 sont ***F_{31} ;F_{41}***………. respectivement.

$$\frac{\vec{F}_{21}}{q_2} = \frac{\vec{F}_{31}}{q_3} = \frac{\vec{F}_{41}}{q_4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\vec{F}_n}{q_n}$$

- La force ***F_n*** définit un champ de vecteur appelé champ électrostatique noté ***E_n***
- Le champ électrostatique crée par q_1 en point M est définie par :

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$

III Champ Electrostatique….

- En General, la champ crée en point M, par une charge ponctuel q placée au point P est:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM} \Rightarrow \vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$$

III Champ Electrostatique….

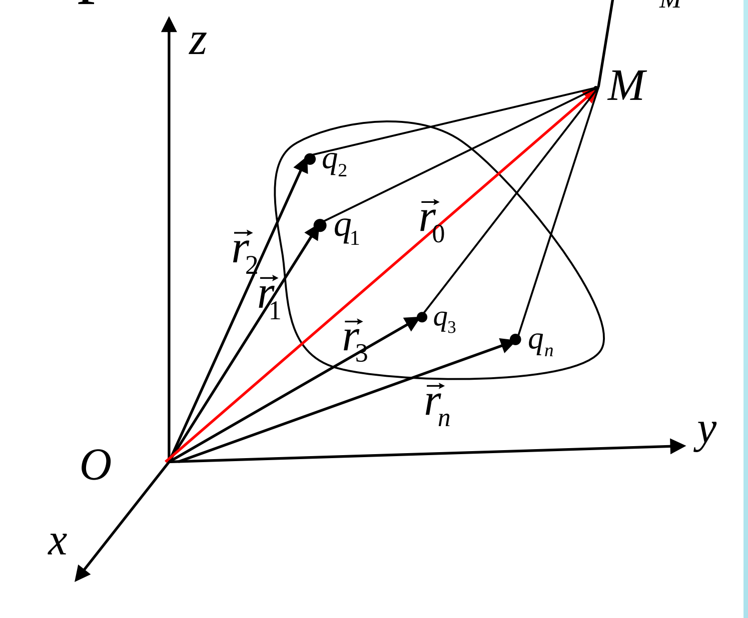
III-2) Champ électrostatique crée par une distribution de charge

a) Distribution Discontinue

- Un system porte les ponctuels charges q_1 q_2 q_3 ……q_n . Le champ électrostatique crée en point M est:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3}\overrightarrow{P_iM}$$

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\left\|\vec{r}_0-\vec{r}_i\right\|^3}\left(\vec{r}_0-\vec{r}_i\right)$$



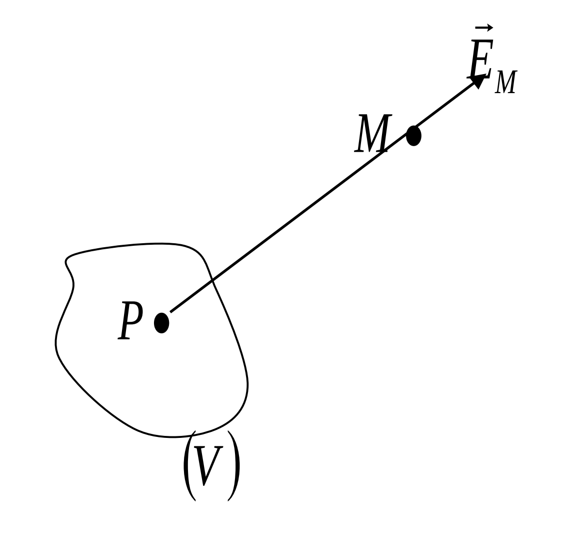
III Champ Electrostatique….

b) Distribution Continue

Pour étudier le champ électrique d'une charge distribuée, il faut le diviser en un petit morceau, qui considèrent comme une charge ponctuelle. Puis appliquer la loi de Coulomb.

- **Pour Charge Volumique**

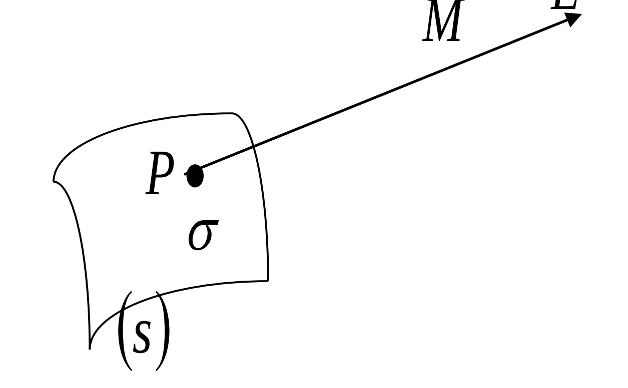
$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\iiint_{(V)} \frac{\rho\, d\tau}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$



III Champ Electrostatique….

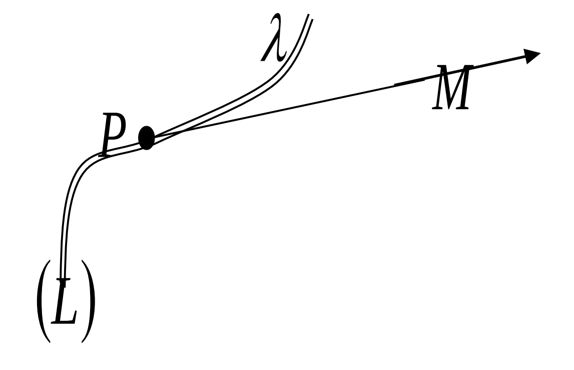
- Pour Charge Surfacique

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\iint_{(S)} \frac{\sigma ds}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$



- Pour Charge linéïque

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{(L)} \frac{\lambda dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM}$$



Example

- 1. On considère un fil infini et dont l'axe de révolution est dirigé suivant (Oz). Le fil porte une densité linéique de charge uniforme λ. Calculer le champ électrique en tout point dans le plan perpendiculaire de l'axe (Oz) et à la distant r de l'axe.
- 2. On considère un cercle de rayon R dont le centre est choisi `a l'origine et dont l'axe est confondu avec (Oz). Le cercle porte une densité linéique de charge uniforme λ. Calculer le champ électrique en tout point de l'axe (Oz).
- 3. On considère un disque de rayon R dont le centre est choisi à l'origine et dont l'axe est confondu avec (Oz). Le disque porte une densité surfacique de charge uniforme σ. Calculer le champ électrique en tout point de l'axe (Oz).

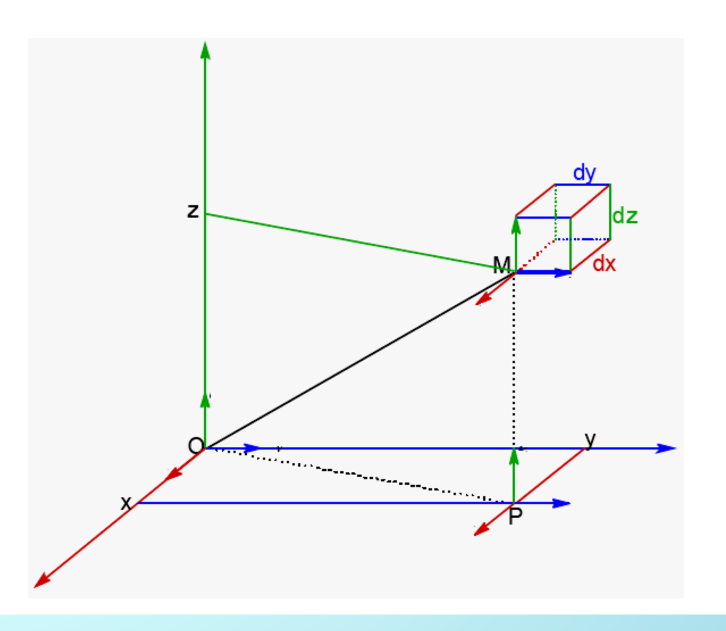
IV Lignes du champ électrostatique

- Considérons un champ de vecteurs **E**(*M*). Une *ligne de champ* est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ **E** défini en ce point.
- Soit *M*(*x*,*y*,*z*) un point d'une ligne de champ. Par définition, le point *M'* tel que **OM'**=**OM**+d**OM** appartient à la ligne de champ si **MM'** est parallèle à **E** lorsque *M'* se rapproche de *M*.

IV Lignes du champ électrostatique

- La courbe dont la tangente est en tout point M colinéaire à **E(M)**. L'équation d'une ligne de champ s'obtient en écrivant que .
- Donc $$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} E_y dz - E_z dy \\ E_z dx - E_x dz \\ E_x dy - E_y dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- En coordonnées cartésiennes

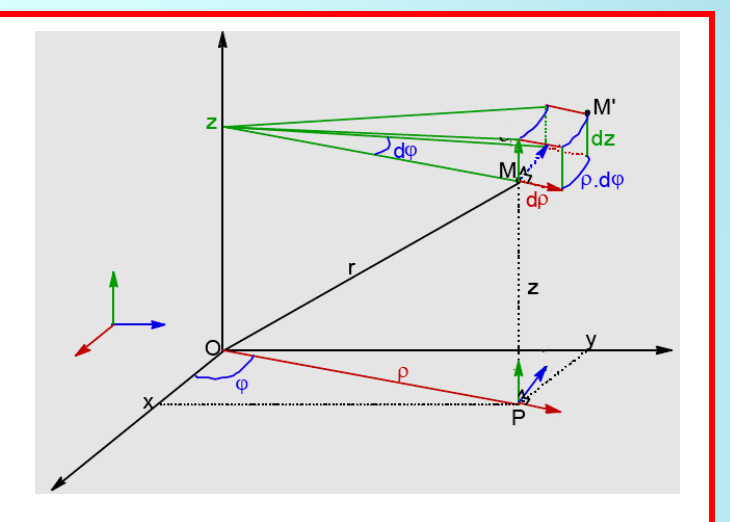
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$



IV Lignes du champ électrostatique

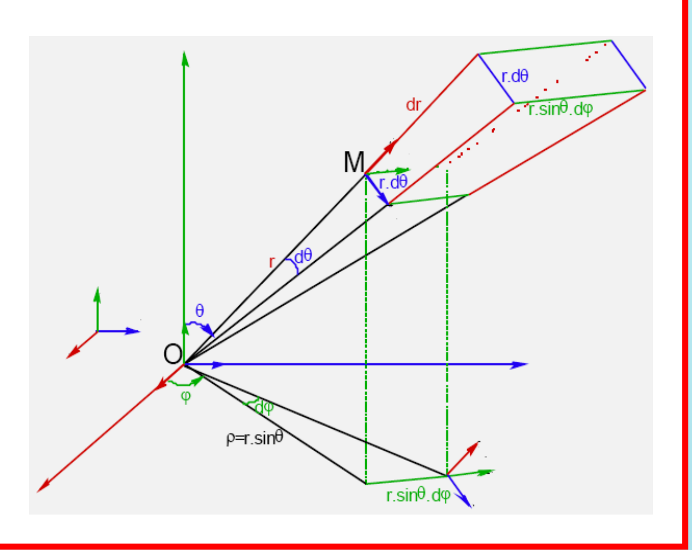
- En coordonnées cylindriques

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$



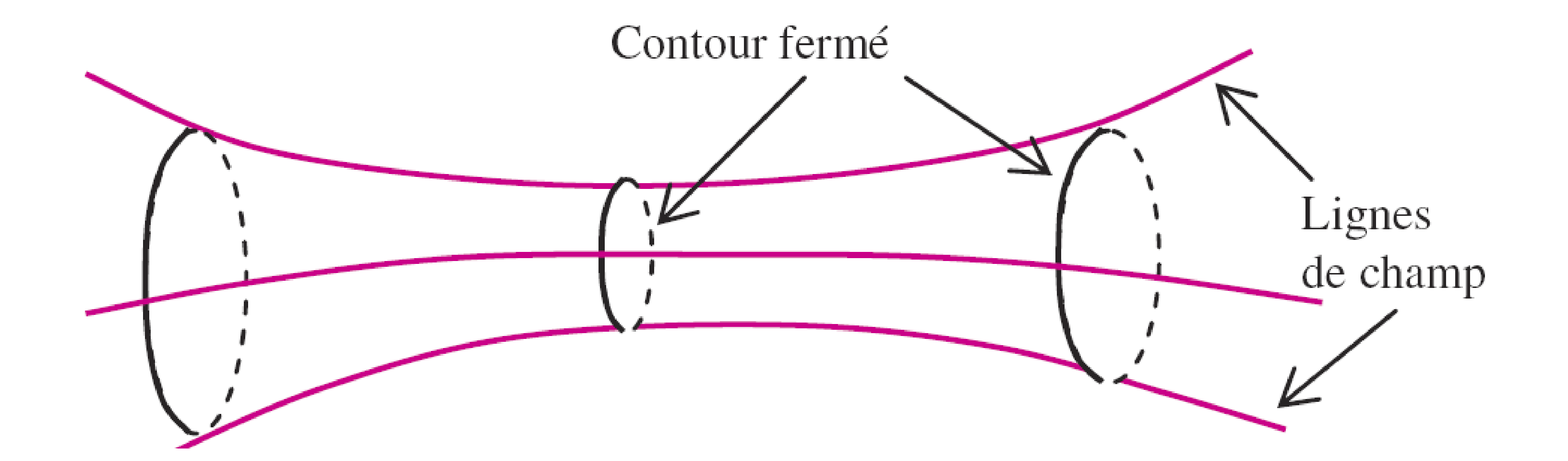
- En coordonnées sphériques

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$



V Tube de champ

- Un tube de champ est la surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.



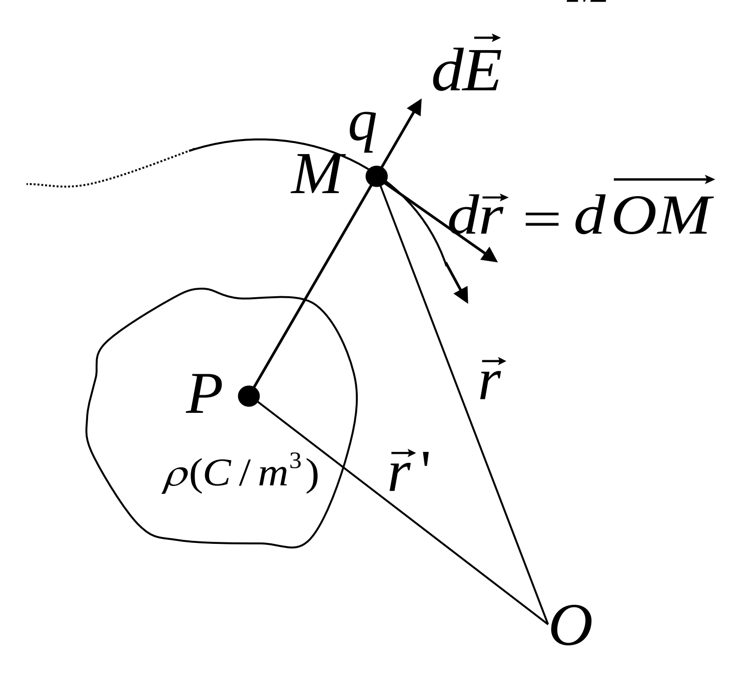
VI Travail de force électrostatique et Potentiel électrostatique

V-1) Expression du travail élémentaire de force électrostatique.

- La charge élémentaire dq au point P créé en M où se trouve la charge q un champ électrostatique ***dE***$_M$

$$d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\rho d\tau}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3}\overrightarrow{PM};$$

$$d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\rho d\tau}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$



- La force ***dF*** exerçant sur q est ;

$$d\vec{F} = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\rho d\tau}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

- Le travail élémentaire effectué par la force élémentaire ***dF:***

$$\delta^2 W = d\vec{F}.d\vec{r} = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|^3}(\vec{r}-\vec{r}').d\vec{r}$$

$$\delta^2 W = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|^2}.d\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|$$

$$\delta^2 W = -q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho d\tau.d\left(\frac{1}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|}\right)$$

- Travail élémentaire effectué par la force ***F=qE***

$$\delta W = -q\iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho.d\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right)d\tau$$

$$= -qd\iiint_V \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = -qdV$$

- avec $V = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$ est la potentiel crée

  en M par la distribution de charge.

- Travail de déplacement entre M et N est :

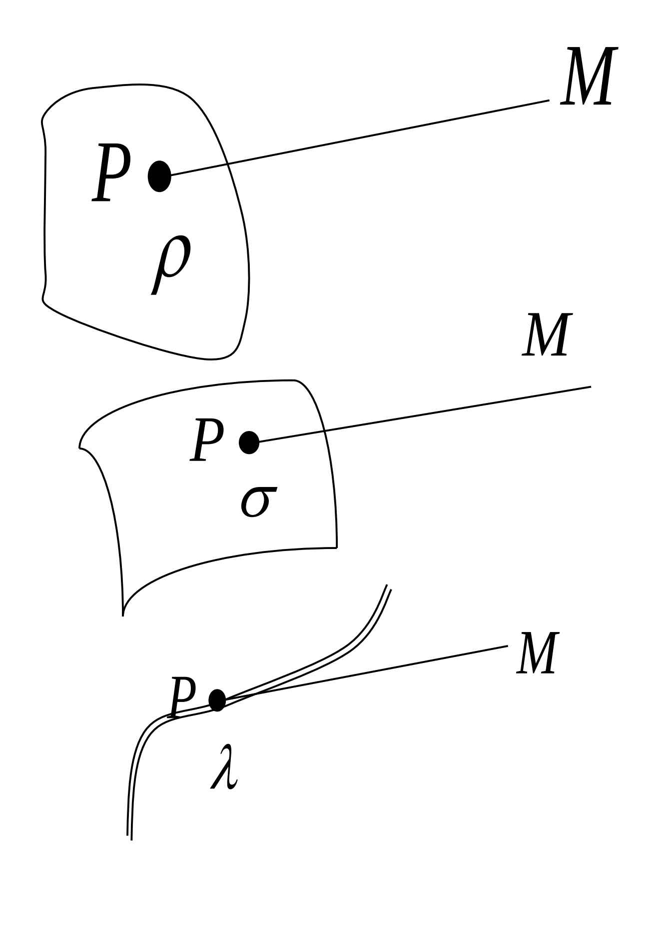
$$W = \int_M^N \delta W = q\int_N^M dV = q(V_M - V_N)$$

ii) Distribution continue

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

$$V = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho d\tau}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$



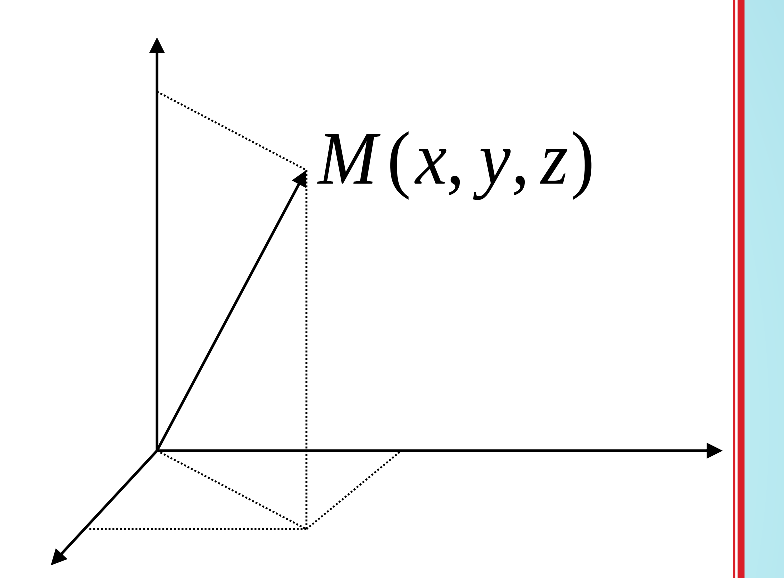
VII Relation entre E et V

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = r\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{grad}\, r = \frac{\vec{r}}{r}; \quad \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{grad}\ f(u) = \frac{df}{du}\overrightarrow{grad}\, u$$

$$\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}\right)$$



$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f$$

Example

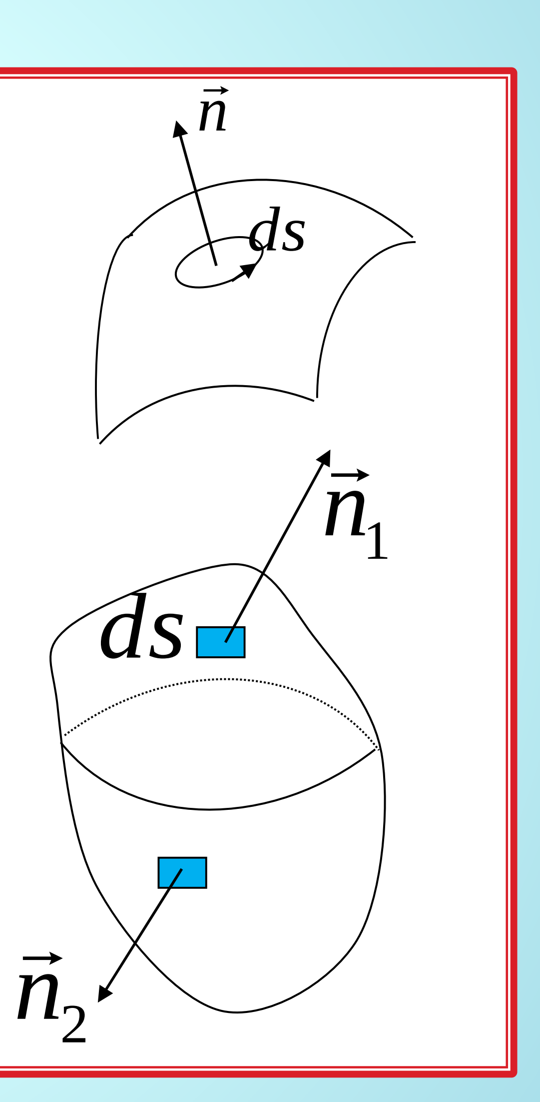
- 1. On considère un fil de longe 2L et dont l'axe de révolution est dirigé suivant (Oz). Le fil porte une densité linéique de charge uniforme λ. Calculer le potentiel électrique dans le plan au milieu de se fil à la distante de r.
- 2. On considère un cercle de rayon R dont le centre est choisi à l'origine et dont l'axe est confondu avec (Oz). Le cercle porte une densité linéique de charge uniforme λ. Calculer le potentiel électrique en tout point de l'axe (Oz).
- 3. On considère un disque de rayon R dont le centre est choisi à l'origine et dont l'axe est confondu avec (Oz). Le disque porte une densité surfacique de charge uniforme σ. Calculer le potentiel électrique en tout point de l'axe (Oz).

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right).$$

VIII Théorème de Gauss

VIII-1 Orientation d'une surface

- ***n*** est vecteur unitaire normal à S
- ***n*** est définie de la règle de Maxwell (où règle de tire bouchon).



- ***n*** se dirige de l'intérieur vers l'extérieur de surface (Pour surface fermée).

VIII Théorème de Gauss…..

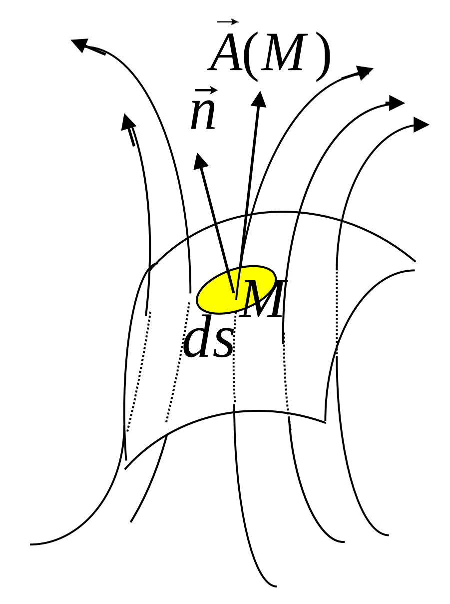
VIII-2 Flux d'un champ de vecteurs

- Un champ A traversée une surface (S), le flux de champ est:

Flux élémentaire: $d\phi = \vec{A}.\vec{n}ds$

$$\phi = \iint_S \vec{A}(M).\vec{n}ds \text{ : pour overt surface}$$

$$\phi = \oiint_S \vec{A}(M).\vec{n}ds \text{ : pour fermer surface}$$

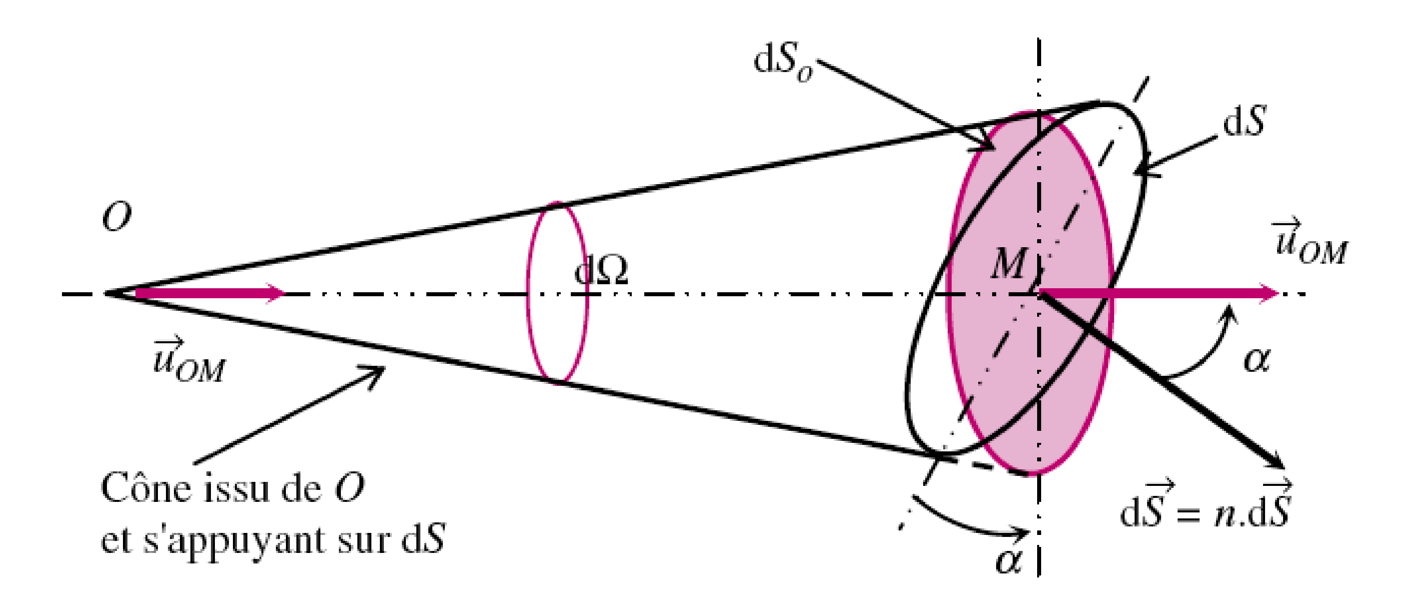


VIII Théorème de Gauss….

VIII-3 Théorème de Gauss

i) Angle de solide

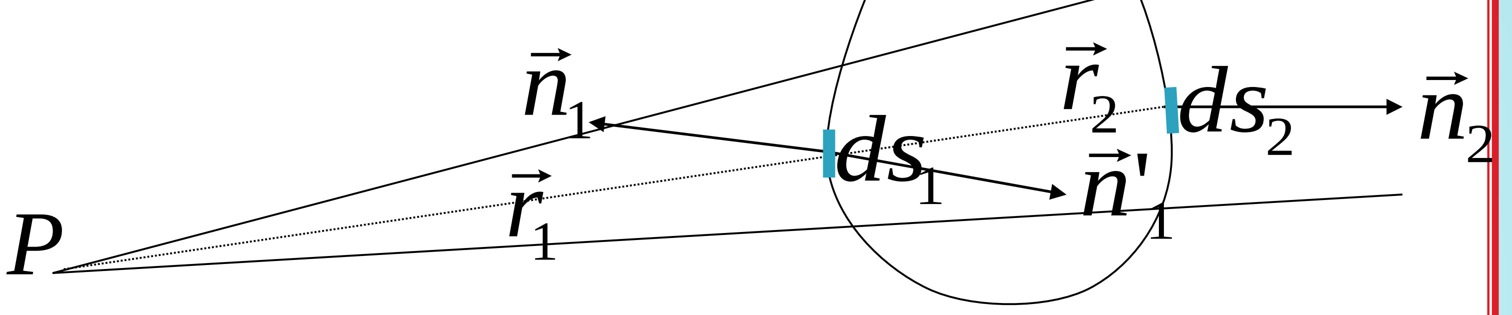
Définition: $$d\Omega = \frac{\vec{r}.\vec{n}ds}{r^3} = \frac{ds.\cos\theta}{r^2}$$



VIII Théorème de Gauss….

a) Angle solide d'une surface fermée





$$d\Omega'_1 = \frac{\vec{r}_1 . \vec{n}'_1}{r_1^3} ds_1 = -\frac{\vec{r}_1 . \vec{n}_1}{r_1^3} ds_1 = -d\Omega_1$$

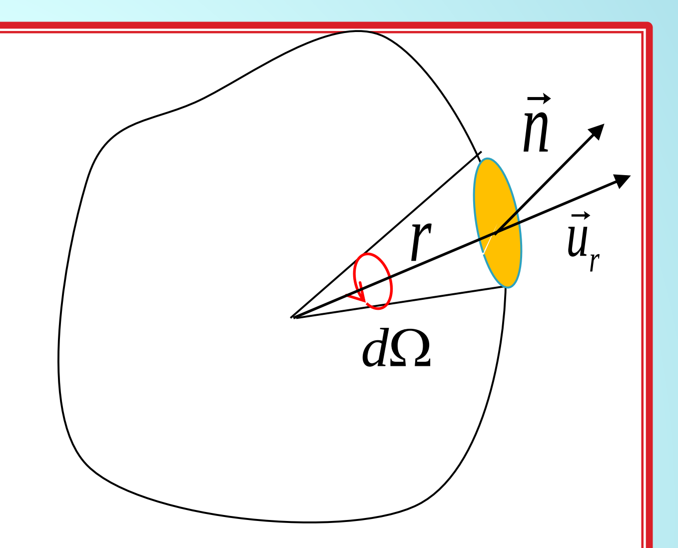
$$d\Omega_1' = d\Omega_2 \quad \text{et } d\Omega_1' = -d\Omega_1$$

$$d\Omega_1 + d\Omega_2 = 0 \Rightarrow \Omega_1 + \Omega_2 = 0$$

$$\Omega = 0$$

VIII Théorème de Gauss….

- Cas de P à l'intérieur de surface



$$d\Omega = \frac{\vec{r}.\vec{n}}{r^3} ds = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

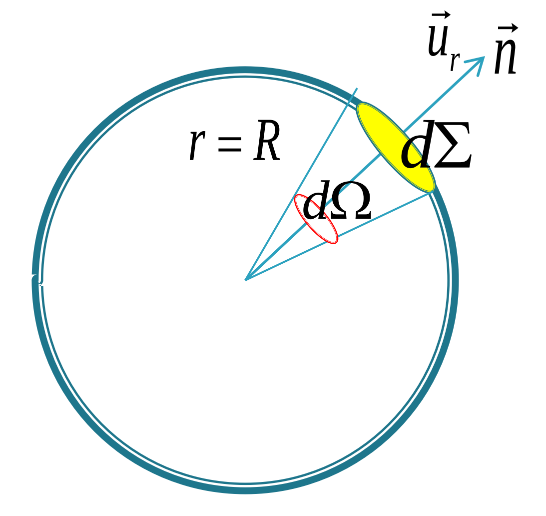
Exemple : Angle solide de sphère

$$d\Sigma = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\vec{s}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Omega = 4\pi$$



VIII Théorème de Gauss….

ii) Théorème de Gauss

- On a une charge dq au point P, et élémentaire du champ ***dE*** au point M

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho d\tau}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} \overrightarrow{PM}$$

- Le flux à travers élémentaire surface ***ds*** est

$$d^2\Phi = d\vec{E}.\vec{n}ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho d\tau}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} \overrightarrow{PM}.\vec{n}ds$$

$$d^2\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho d\tau d\Omega$$

VIII Théorème de Gauss….

- Flux de ***E*** travers surface élémentaire ***ds*** est

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \iiint_v \rho d\tau = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Flux Totale

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_s d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_s \vec{E}.\vec{n}ds = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

VIII Théorème de Gauss….

Q_{in} Charge totale continue dans cette surface fermé.

- Dans milieu matériel

$$\oiint_s \vec{E}.\vec{n}ds = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

- On pose, le vecteur densité flux électrostatique **D=εE**

$$\oiint_s \vec{D}.\vec{n}ds = Q_{in}$$

Example

- 1.1. Fil infini porte densité λ constant. Trouver le champ électrique à la distant r de se fil.
- 1.2. Un plan infini chargée la charge densité surfacique σ uniforme. Calculer champ électrique.
- 1.3. On considère une sphère de rayon R, chargée en surface de densité surfacique de charge σ uniforme. Calculer le champ électrique puis le potentiel en tout point de l’espace.
- 1.4. On considère une sphère de rayon R, chargée en volume de densité volumique de charge ρ uniforme. Calculer le champ électrique puis le potentiel en tout point de l’espace.

IX Equation locales de l'électromagnétique

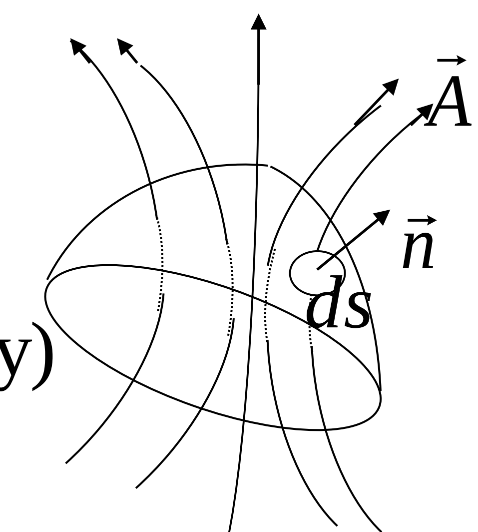
- Divergence d'un champ de vecteurs
  - On a un champ de vecteur ***A***
  - Divergence ***A*** est définie; le flux de vecteur ***A*** par unité de volume.
    - Flux

$$\Phi = \iint_s \vec{A}.\vec{n}ds$$

  - Par définition

$$\Phi = \iiint_v div\vec{A}d\tau \text{(Green–Ostrogradsky)}$$

$$\Rightarrow \iint_s \vec{A}.\vec{n}ds = \iiint_v div\vec{A}d\tau$$



- En électrostatique

$$\oiint_{(s)} \vec{E}.\vec{n}ds = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho d\tau \quad \Leftrightarrow \iiint_v div\vec{E}d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho d\tau$$

- soit $div\vec{D} = \rho$ Où $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- Equation de Poisson

Δ -Opérateur de Laplace ou Laplacien

$$div\,\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

X Energie Potentielle d'interaction

1) Cas de deux charges ponctuelles

- La charge q_2 se déplace dans le champ électrostatique ***E*** crée par q_1.
- Travail élémentaire effectué par la force ***F*** coulombienne

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\overrightarrow{PM}.d\vec{r}$$

$$\delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^2}.d\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|$$

$$\delta W = -d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = -dU_P$$

- Donc

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

- Énergie potentielle d'interaction de deux charge ponctuelles

$$U_P = q_2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = q_2 V_2$$

$$U_P = q_1\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = q_1 V_1$$

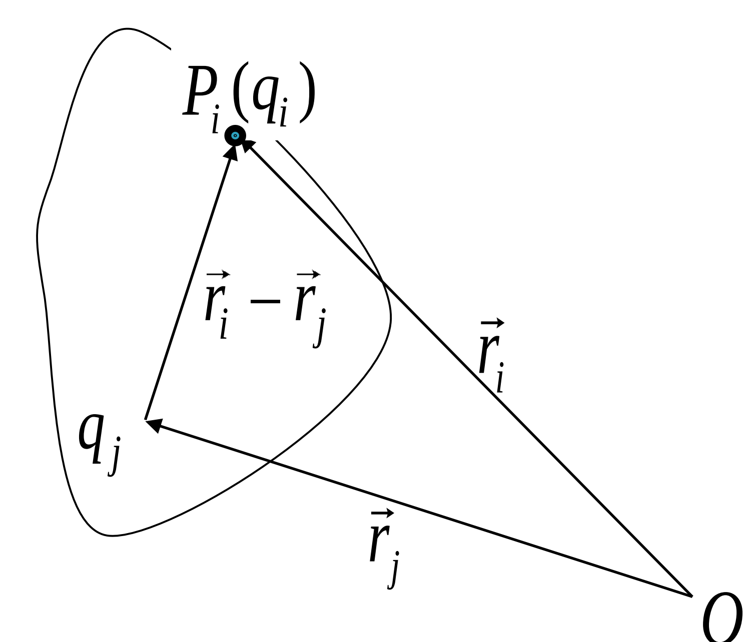
$$\Rightarrow U_P = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2\right)$$

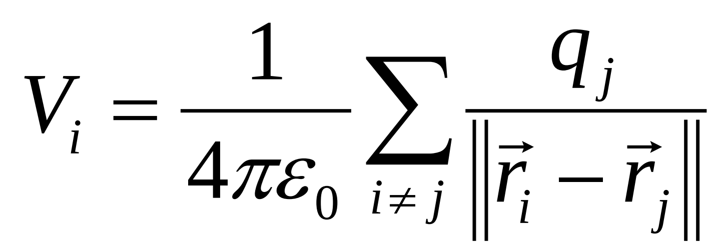
2) Cas de N charges ponctuelles

Énergie potentielle totale;

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$

V_i est le potentielle en point P_i crée par la charge q_j





$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_j}{\left\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right\|}$$

Example

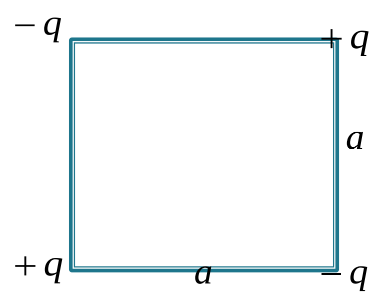
Les trios charges ponctuel sont située dans les coins d’un carré de côté a.

a) Trouver le travaille pour amener une autre charge q depuis infini à la quatrième coin. $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

b) Trouver le travaille pour assembler les quatre charges. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{a}\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

(a) Three charges are situated at the corners of a square (side a), as shown in Fig. 2.41. How much work does it take to bring in another charge, $+q$, from far away and place it in the fourth corner?

(b) How much work does it take to assemble the whole configuration of four charges?



XI Energies du champ électrostatique

1 Energies électrostatique en fonction de potentielle

- On a $U_e = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$
- Pour continue charge $U_e = \frac{1}{2}\int V dq$
  - Où V potentiel la distribution.

2 Energies électrostatique en fonction du champ

On a $U_e = \frac{1}{2}\iiint_v \rho V d\tau$

$$\begin{cases} U_e = \frac{1}{2}\iiint_v \rho V d\tau \\ div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_v V.div\vec{E} d\tau$$

$$div(V\vec{E}) = Vdiv\vec{E} + \overrightarrow{gradV}.\vec{E} = Vdiv\vec{E} - E^2$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_v div(V\vec{E})d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_v E^2 d\tau$$

Par théorème de Green-Ostrogradsky

$$\iiint_v div(V.\vec{E}).d\tau = \oiint_s V.\vec{E}.ds$$

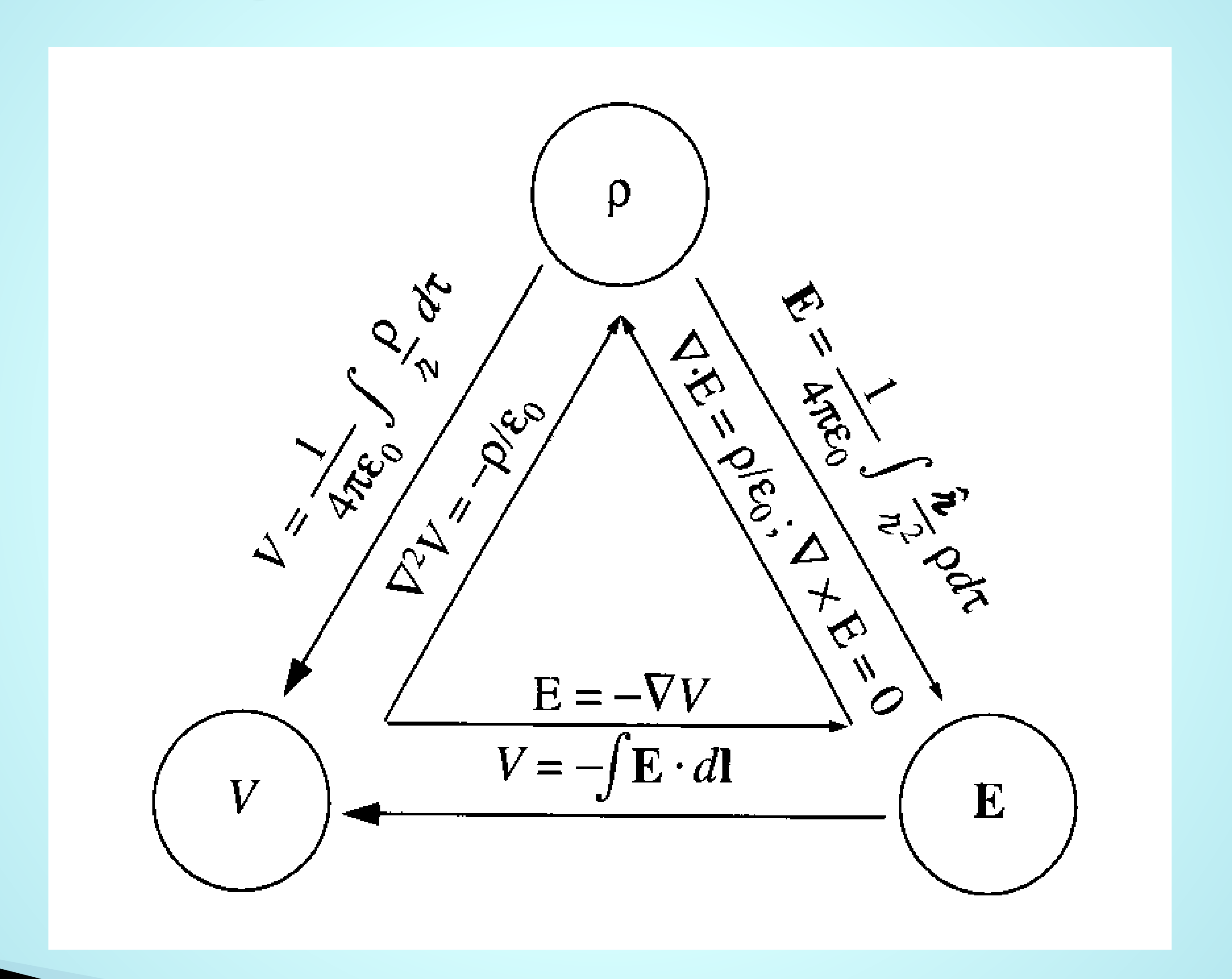
Si $r \to \infty, V = 0 \Rightarrow \oiint_s V.\vec{E}.ds = 0$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_{all\ space} E^2 d\tau$$

On pose $\frac{dU_e}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ est la densité volumique d'énergies

électrostatique.

Summary



ρ
V
E
$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{\mathscr{r}}\,d\tau$
$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\rho\,d\tau$
$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0\,;\ \nabla\times\mathbf{E} = 0$
$\mathbf{E} = -\nabla V$
$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$

Example

- Trouver l'énergie d'une sphère creuse de rayon R, et charge totale q.

Find the energy of a uniformly charged spherical shell of total charge q and radius R.

Solution 1: Use Eq. 2.43, in the version appropriate to surface charges:

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V \, da.$$

Now, the potential at the surface of this sphere is $(1/4\pi\epsilon_0)q/R$ (a constant), so

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma \, da = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

Solution 2: Use Eq. 2.45. Inside the sphere $\mathbf{E} = 0$; outside,

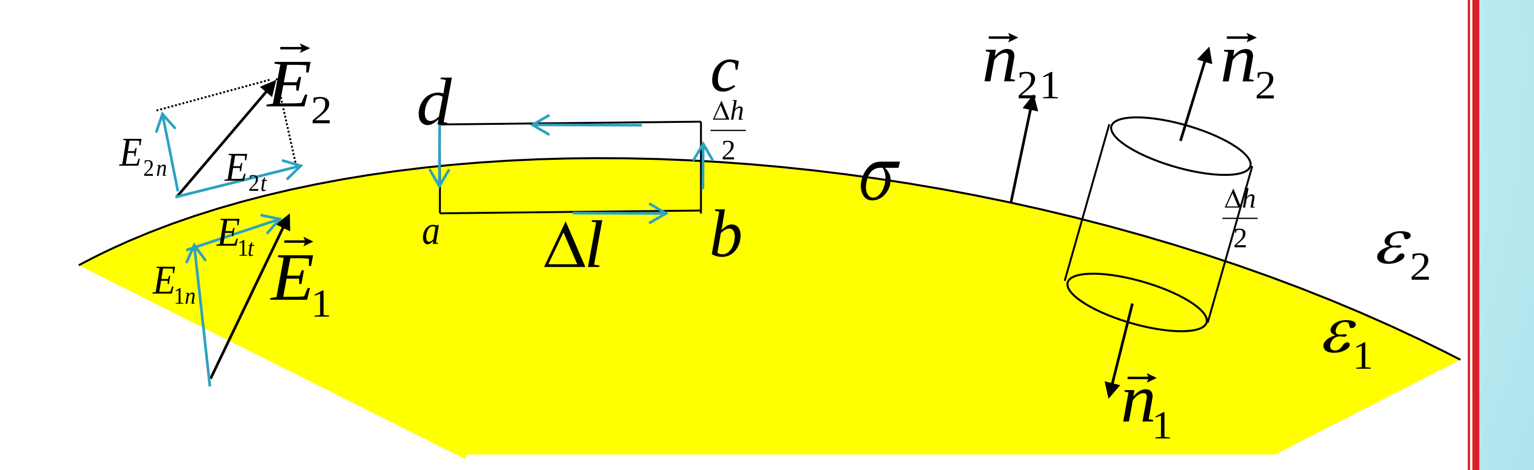
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \qquad \text{so} \qquad E^2 = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{\text{outside}} \left(\frac{q^2}{r^4}\right) (r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi) \\ &= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} q^2 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}. \end{aligned}$$

XII Relation de passage

- On a deux meilleur déférences avec permittivité respectivement ε_1 *et* ε_2 . Un champ électrostatique traverse les deux. On étudiera la composante tangentielle et composante normale du champ.



1) Composante tangentielle du champ

On observe la rectangulaire abcd,

Pour les champs électrostatique $\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(\vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t}\right) d\vec{r}_{ab} + \int_b^c \left(\vec{E}_n + \vec{E}_t\right) d\vec{r}_{bc} + \int_c^d \left(\vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2t}\right) d\vec{r}_{cd}$$

$$+ \int_d^a \left(\vec{E}_n + \vec{E}_t\right) d\vec{r}_{da} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \vec{E}_{1t} d\vec{r}_{ab} + \int_b^c \vec{E}_n d\vec{r}_{bc} + \int_c^d \vec{E}_{2t} d\vec{r}_{cd} + \int_d^a \vec{E}_n d\vec{r}_{da} = 0$$

À l'interface ; $\Delta h \to 0$ $\Rightarrow \int_b^c \vec{E}_n d\vec{r}_{bc} = \int_d^a \vec{E}_n d\vec{r}_{da} = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{E}_{2t} d\vec{r}_{ab} - \int_c^d \vec{E}_{1t} d\vec{r}_{cd} = 0$$

$$\Rightarrow E_{1t}\Delta l - E_{2t}\Delta l = 0$$

$$\Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

2) Composante normale du champ

Dans une cylindre fermé, le flux électrostatique totale si, $\Delta h=0$

$$\oiint_S \vec{D}.\vec{n}ds = \iint_S \sigma ds$$

$$\Leftrightarrow \iint_S \vec{D}_{1n}.\vec{n}_1 ds_1 + \iint_S \vec{D}_{2n}.\vec{n}_2 ds_2 = \iint_S \sigma ds$$

$$\Leftrightarrow \iint_S \left(\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}\right)\vec{n}_{21} ds = \iint_S \sigma ds$$

$$\Leftrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\left(\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}\right) = \sigma$$

Composante nornale du champ

- Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ => $\left(E_{2n} - E_{1n}\right) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \Leftrightarrow \vec{\nabla}V_2 - \vec{\nabla}V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

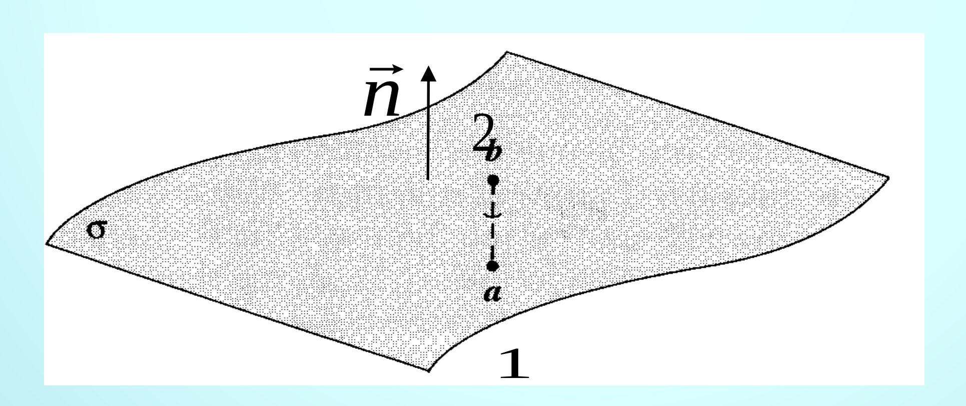
$$\frac{\partial V_2}{\partial n} - \frac{\partial V_1}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Example

1 Pour charge surfacique infini de densité σ,

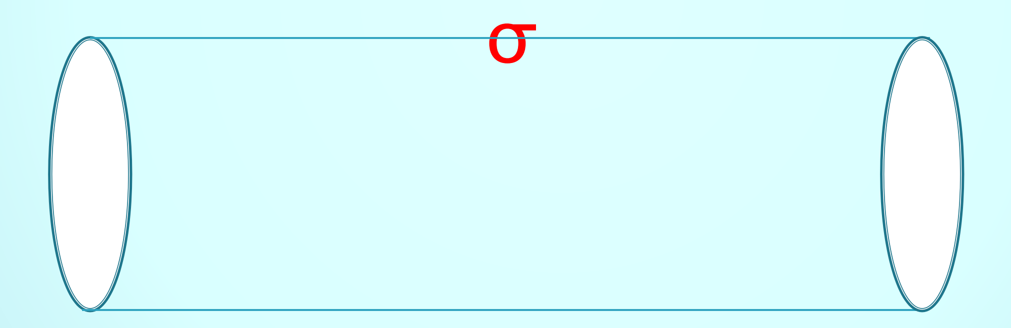
$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}$$

Donc $$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}$$



2) tube de cylindre infini de charge surfacique σ, à l’interne de cylindre le champ est 0, à l’extérieur le champ est $\mathbf{E_2} = \sigma/\varepsilon_0 \mathbf{u_r}$

Donc: $\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1} = \sigma/\varepsilon_0 \mathbf{u_r}$



3 Sphère creuse de rayon R charge densité σ

Le champ à l'interieur est 0, et à l'exterieur est

$\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$ Donc $E_2 - E_1 = \sigma / \varepsilon_0$

